TITLE:
When is a Local Homeomorphism between Continua a Homeomorphism? (Shape Theory and Topological Spaces)

AUTHOR(S):
富永, 晃

CITATION:
富永, 晃. When is a Local Homeomorphism between Continua a Homeomorphism? (Shape Theory and Topological Spaces). 数理解析研究所講究録 1981, 445: 45-56

ISSUE DATE:
1981-12

URL:
http://hdl.handle.net/2433/102888

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
445巻 1981年 45-56

When is a local homeomorphism between continua a homeomorphism?

広島大 総合科学部 富 永 晃

要約　位相空間Xから位相空間Yへの写像$f: X \to Y$が，次の条件(*)をみたすとき，XからYへの局所同相写像(local homeomorphism)とよぶ：

(*) 任意の点$x \in X$に対して，その適当な開近傍Uをとれば，$f(U)$はYにおける開集合で，fのUへの制限$f|U: U \to f(U)$は同相写像(homeomorphism)である．

このとき如何なる条件のもとでfが同相写像になるか，換言すれば方程式$y = f(x)$ ($x \in X$, $y \in Y$)が一意解をもつかという問題は古くからのものである．

§1ではX，Yが主としてコンパクト連結距離空間すなわち連続体(Continuum)の場合にこの問題に関する従来の成果について略述する．§2では連続体上に被覆空間論の手法を適用するため，弧および正方形に対応するものとして，それぞれchainおよびnetについて考察し，これによりLau

の定理（§1（12））で，条件 onto を除いた類似の定理を証明する．これは Rosenholtz の問題（§2）に適用できる．

§1　小史　この節では，標題の問題に関する従来の主な成果を観みよう．$f: X \to Y$ を X から Y の上への局所同相写像とするとき，X，Y，f が以下に示す条件をみたせば，f は同相写像になる．

(1)　S. Eilenberg（1934 [5], Théorèm III, P. 42）

$X =$　弧状連結（arcwise connected）連続体

$Y =$　単連結連続体

(2)　S. Banach; S. Mazur（1934 [1], Satz II, P. 177）

$X =$　連結距離空間

$Y =$　局所弧状連結・単連結距離空間

$f =$　proper 局所同相写像

ここで f が proper であるとは，Y の任意のコンパクト部分集合 K の逆像 $f^{-1}(K)$ がコンパクトであることをいう．

(3)　G. T. Whyburn（1942 [18], Corollary, P. 199）

$X =$　連続体

$Y =$　dendrite（＝局所連結で単純閉曲線を含まない連続体＝局所連結で hereditarily unicoherent な連続体）

(4) G. T. Whyburn (同上)

X = dendrite

Y = 連続体

(5) T. Maćkowiak (1973 [13], Theorem 9, p. 857)

X = 連続体

Y = λ-dendroid (= hereditarily decomposable・hereditarily unicoherent 連続体)

(6) T. Maćkowiak (同上, Corollary 10, p. 858)

X = λ-dendroid

Y = 連続体

Maćkowiak は (5) から (6) を，λ-dendroid の開写像による像は λ-dendroid である ([4] VI, p. 214 ; XIV, p. 217) ことを用いて導いた。

(7) I. Rosenholtz (1974 [17], Theorem 20, p. 261)

X = arc-like 連続体 (= chainable 連続体 = snake-like 連続体)

Y = 連続体

(8) C. W. Ho (1975 [9], Theorem 2, p. 240)

X = 弧状連結ハウスドルフ空間

Y = 単連結ハウスドルフ空間

f = proper 局所同相写像

(9) T. Maćkowiak (1977 [14], Theorem, P. 64)

X = 連続体

Y = tree-like 連続体

(10) T. Maćkowiak (同上, Corollary, P. 67)

X = tree-like 連続体

Y = 連続体

Maćkowiak は，(9) から (10) を，tree-like 連続体の開写像による像は tree-like である ([15], Corollary 2·3, P. 472) を用いて導いた。

(11) A. Lau (1978 [11], Theorem 2, P. 316 ; 1979 [12], Theorem, P. 384)

X = 連続体

Y = simple limit

ここで Y が simple limit であるとは，Y は連続体であって，bonding maps g_{ij} が onto であるような，単連結・局所連結連続体 Y_i の射影的極限 (inverse limit) であることをいう。すなわち $Y = \varprojlim \{Y_i, g_{ij}\}$.

(12) A. Lau (1979 [12], Main Theorem, P. 382)

X = simple limit で，しかも X 上には

(**) 位数が素数である如何なる群も自由には作用しない。

Y = 連続体

逆に X が simple limit のとき，X を他の空間上にうつす任意の局所同相写像が同相写像であるためには $(**)$ が成り立たねばならない。

ここで X に作用する群を G とするとき，それが<u>自由に</u>(freely) 作用するとは，単位元と異なる任意の元 $g\in G$ は不動点をもたないこと，すなわち $g(x)=x$ なる $x\in X$ が存在しないことである。

<u>注意 1</u>　(12) で，X が同相写像に関して不動点性をもつとき，すなわち X から自身の上への任意の同相写像 h に対して $h(x)=x$ なる $x\in X$ が存在するとき，X から他の空間の上への任意の局所同相写像は同相写像である。実際，位数が素数である有限群 H が X 上に作用するとして，その単位元と異なる元は X 上の同相写像だから不動点をもつ。すなわち H は自由には作用しない。

<u>注意 2</u>　(1)〜(12) の相互関係は次のようになる．ただし $A\to B$ は A から B が導かれることを意味する．

$$
\begin{tikzcd}
\text{Fox's overlay Theorem ([6], (6.1), P.64)} \arrow[d] & & & & & \\
 & & & & (1) \arrow[dl] & \\
(11) \arrow[r] & (9) \arrow[r] & (5) \arrow[r] & (3) & (2) \arrow[l] & (8) \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

$$
(12)\to(7)\leftarrow(10)\to(6)\to(4)
$$

$(11)\to(9)$ は，λ-dendroid は tree-like であること，した

がって trees の射影的極限であることと，λ-dendroid が不動点性をもつことからいえる。(9)→(5)→(3)，(10)→(6)→(4) は tree-like 連続体←λ-dendroid←dendrite から，そして (12)→(7) は tree-like 連続体←arc-like 連続体かつ arc-like 連続体は不動点性をもつことからいえる。

(12)→(10)が成り立つかどうかは今のところ分らない。

注意 3　X，Y がコンパクトでない場合，とくに R^n のとき [8]，[3]，[16]，[7]，[2] を，他の参考文献名については [10] 参照。

§2　定理　この節では，まず被覆空間論の手法を連続体に適用するのに便利と思われる chain と net について述べる。これらはそれぞれ弧と正方形に対応するものである。次にこれによって Lau の定理（§1 (12)）における "bonding maps は onto とする" という条件を除いた類似の定理を証明する。この定理は，平面を分離しない連続体をある空間上にうつす局所同相写像は同相写像か，を問う Rosenholtz の問題（[17]，Question 4，P. 262）に適用できる。したがって Lau の方法（[12]，P. 384）によって，この問題は肯定的解をもつ。

定理　$X=\cap_i X_i$ を，単連結・局所連結連続体 X_i の単調減少列 $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ の共通集合である連続体とする。X から他の空

間の上への任意の局所同相写像が同相写像であるための必要十分条件は，位数が素数である如何なる群も X 上に自由には作用し得ないことである。

補題3が証明の key lemma である。

<u>定義</u> 距離空間 M の点 a から b に至る <u>δ-chain</u> とは，順序付けられた点列

$$\alpha = \{ a = x_1 , x_2 , \cdots , x_\ell = b \}$$

で，$d(x_i, x_{i+1}) < \delta \ (1 \leq i < \ell)$ なるものをいう。a を<u>始点</u>，b を<u>終点</u>という。$a = b$ のとき a を基点にもつ <u>δ-loop</u> という。$\beta = \{x_\ell, x_{\ell+1}, \cdots, x_m\}$ のとき，$\{x_1, \cdots, x_\ell, \cdots, x_m\}$ を $\alpha\beta$ とかく。$\alpha^{-1} = \{x_\ell, \cdots, x_2, x_1\}$ とする。次に <u>δ-net</u> とは有限点集合 $\{x_{ij} : 1 \leq i \leq \ell , 1 \leq j \leq m\}$ で，かつ $diam\{x_{ij}, x_{i,j+1}, x_{i+1,j}, x_{i+1,j+1}\} < \delta \ (1 \leq i < \ell, 1 \leq j < m)$ なるものである。δ-loop $\alpha = \{a_1, a_2, \cdots, a_\ell = a_1\}$ に対し，$x_{i1} = a_i$, $x_{1j} = x_{im} = x_{\ell j} = a_1 \ (1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$ なる δ-net $\{x_{ij} : 1 \leq i \leq \ell , 1 \leq j \leq m\}$ が存在するとき，α は M において <u>δ-homotopic to zero</u> といって $\alpha \simeq 0 (\delta)$ とかく。

X，Y を連続体，$f: X \to Y$ を X から Y の上への局所同相写像とする。このとき記号 $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$, ε, μ, ν, λ を次のように定める。

$\mathcal{V}$ = 次の如き Y の開被覆：$V \in \mathcal{V}$ に対し X の互いに交わらない開集合族 $\mathcal{C}(V) = \{E_1, \cdots, E_k\}$ で，$f^{-1}(V) = \cup_{i=1}^{k} E_i$ かつ $f|E_i : E_i \to V$ ($1 \leq i \leq k$) が E_i から V の上への同相写像となるようなものがある．

$\mathcal{U}$ = X の開被覆 $\cup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{C}(V)$，$\varepsilon$ = $\mathcal{V}$ の Lebesgue 数，

μ = $\mathcal{U}$ の mesh，ν = $\mathcal{U}$ の Lebesgue 数，

λ = 正数で，$A \subset X$，$diam(A) < \lambda$ ならば $f|A : A \to f(A)$ は同相写像となるようなもの．

$\beta = \{b_1, \cdots, b_\ell\}$ を，各 $\{b_i, b_{i+1}\}$ が $\mathcal{V}$ の1つの元 V_i に含まれるような Y 内の chain とする．X 内の chain $\alpha = \{a_1, \cdots, a_\ell\}$ が，$f(a_i) = b_i$ で，$\{a_i, a_{i+1}\}$ が $\mathcal{C}(V_i)$ の1つの元に含まれるとき，α は β を <u>cover</u> する，あるいは α は β の <u>lifting</u> であるという．

次の補題1，2の証明は容易である．

<u>補題 1</u>　β を，$y \in Y$ を始点とする ε-chain とし，$f(x) = y$ とする．$\mu < \lambda/2$ ならば，x を始点とし β を cover するただ1つの chain が存在する．

<u>補題 2</u>　β, β' を，共に y から y' への Y 内の chains で，$\beta\beta'^{-1} \simeq 0\ (\varepsilon)$ をみたすものとする．また α, α' を $f(x) = y$ なる $x \in X$ を始点とし β, β' を cover するものとする．もし $\mu < \lambda/2$ ならば，α, α' は同じ終点をもつ．したがって

ε-homotopic to zero であるloopのliftingはloopである。

次の補題3を示せば，定理はLauのそれと同様に証明される。

<u>補題3</u>　Xを定理の連続体とし，$f:X\to Y$をXから空間Yの上への局所同相写像とする。a，bを$f(a)=f(b)$であるXの点とすると，$g(a)=b$なるXからそれ自身の上への同相写像$g:X\to X$で，$f\circ g=g$をみたすものがある。

<u>証明</u>　(1)　$\mu<\lambda/2$とする。

(2)　$\tau_0>0$を，$diam(A)<\tau_0$なるXの部分集合Aに対し$diam(f(A))<\varepsilon$がなりたつようにえらぶ。

$X=\cap_i X_i$だから，Xの$\tau_0/4$近傍に含まれるようなX_nがある。

(3)　$\delta>0$を，$d(z,z')<\delta$なる$z,z'\in X_n$はX_n内で直径$<\tau_0/2$の弧で結べるようにとる。これはX_nが局所連結でコンパクトだから可能となる。

(4)　$\tau>0$を，$\tau\leq\min\{\tau_0,\delta\}$かつ$\alpha$がX内の$\tau$-chainなら，$f(\alpha)$の任意のliftingは$\delta$-chainとなるようにとる。

そこで$g:X\to X$を次のように定義する：$x\in X$に対し，aとxをτ-chainで結ぶ。(4)と(2)から$f(\alpha)$はY内のε-chainである。εは$\mathcal{U}$のLebesgue数だから，(1)と補題1より$f(\alpha)$を，bを始点とするX内のchain α'に一意的にliftでき

る．α' の終点を $g(x)$ とする．明らかに $f\circ g=f$ である．

次に g が well defined であることを示そう．$\alpha=\{a=x_1, x_2, \cdots, x_\ell=x\}$, $\alpha'=\{a=x_{\ell+m}, x_{\ell+m-1}, \cdots, x_\ell=x\}$ を a と x を結ぶ X 内の τ-chain とし，α_k を x_k と x_{k+1} を結び $\mathrm{diam}(\alpha_k)<\tau_0/2$ なる X_n 内の弧とする（cf. (3), (4)）．

閉曲線 $\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_{\ell+m-1}$ の parametrization を

$$\psi: I=[0,1]\to\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_{\ell+m-1}$$

とすれば，X_n が単連結だから，連続写像 $F: I\times I\to X_n$ で

$$\begin{cases} F(s,0)=\psi(s), \\ F(s,1)=F(0,t)=F(1,t)=a, \end{cases} \qquad (0\le s, t\le 1)$$

をみたすものがある．さらに次のような数列 $\{s_i\}$, $\{t_j\}$ を見出し得る：$0=s_1<s_2<\cdots<s_p=1$, $0=t_1<t_2<\cdots<t_q=1$, $\mathrm{diam}\{z_{ij}, z_{i,j+1}, z_{i+1,j}, z_{i+1,j+1}\}<\tau_0/2$ ($z_{ij}=F(s_i,t_j)$) かつ $0=s_{i(1)}<\cdots<s_{i(k)}<\cdots<s_{i(\ell+m)}=1$, $z_{i(k),1}=x_k$ なる部分列 $\{s_{i(k)}\}$ がある．

$x_{ij}\in X$ を，$d(x_{ij}, z_{ij})<\tau_0/4$, $x_{iq}=x_{1j}=x_{pj}=a$ $(0\le i\le p,\ 1\le j\le q)$, $x_{i(k),1}=x_k$ $(1\le k\le\ell+m)$ となるようにえらぶ．すると $\{x_{ij}\}$ は X 内の τ_0-net で，$\{f(x_{ij})\}$ は Y 内の ε-net となる．そこで

$$\beta=\{f(a)=f(x_{11}), f(x_{21}), \cdots, f(x_{i(\ell),1})=f(x)\},$$

$$\beta'=\{f(a)=f(x_{p1}), f(x_{p-1,1}), \cdots, f(x_{i(\ell),1})=f(x)\}$$

とおけば，$\beta\beta'^{-1} \simeq 0\ (\varepsilon)$ となる．したがって始点が b である β，β' の liftings は，補題2によって同じ終点 $g(x)$ をもつ．

g が X をそれ自身の上にうつす同相写像であることは容易に示し得る．

定理の証明は，Lau のそれ（[12]，p. 383）に準ずる．

References

[1] Banach, S. and S. Mazur: Über mehrdeutige stetige Abbildungen, Studia Math. 5 (1934), 174 - 178.

[2] Borel, A. and J. P. Serre: Impossibilité de fibrer un espace euclidien par des fibres compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, 230 (1950), 2258 - 2260.

[3] Cartan,H.:Sur les transformations localement topologiques, Acta Litt. Sci. Szeged, 6 (1933), 85 - 104.

[4] Charatonik, J. J.; Confluent mappings and unicoherence of continua, Fund. Math., 56 (1964), 213 - 220.

[5] Eilenberg, S.: Sur quelques propriétés des transformations localement homéomorphes, Fund. Math. 24 (1934), 35 - 42.

[6] Fox, R. H.: On shape, Fund. Math. 74 (1972), 47 - 71.

[7] Gordon, W. B.: On the diffeomorphisms of Euclidean space, Amer. Math. Monthly 79 (1972), 755 - 759.

[8] Hadamard, J.: Sur les transformations ponctuelles, Bull. Soc. Math. France 34 (1906), 71 - 84.

[9] Ho, C. W.: A note on proper maps, Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975), 237 - 241.

[10] Jungck, G. F.: Local homeomorphisms, Dissertation, 1977.

[11] Lau, A.: Certain local homeomorphisms of continua are homeomorphisms, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), 315 - 317.

[12] ——— : Certain local homeomorphisms of continua are homeomorphisms.II, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), 381 - 384.

[13] Maćkowiak, T.: A note on local homeomorphisms, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 21 (1973), 855 - 858.

[14] ——— : Local homeomorphisms onto tree-like continua, Colloq. Math. 38 (1977), 63 - 68.

[15] McLean, T. B.: Confluent images of tree-like curves are tree-like, Duke Math. J. 39 (1972), 465 - 473.

[16] Palais, R. S.: Natural operations on differential forms, Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959), 125 - 141.

[17] Rosenholtz, I.: Open maps of chainable continua, Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974), 258 - 264.

[18] Whyburn, G. T.: Analytic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. vol. 28, New York, 1942.